Kapitola 9

LINEÁRNÍ ALGEBRA

Na střední škole se pracuje s vektorem jako s orientovanou úsečkou nebo jako s fyzikální veličinou, která má určitou velikost, směr a orientaci. V této kapitole budeme definovat vektory jako uspořádané množiny *n* čísel, které jsou prvky tzv. vektorového prostoru. Pomocí vektorů vytvoříme nové algebraické struktury - matice a determinanty a ukážeme si jejich využití k efektivnímu řešení soustav lineárních rovnic. Tato partie matematiky, kterou nazýváme lineární algebrou, má celou řadu užitečných aplikací. Jednou z nich je například lineární programování, využívané pro řešení úloh ekonomického charakteru.

9.1 Vektor, lineární závislost a nezávislost vektorů

Vektor

Definice 9.1.: Algebraickým vektorem $\vec{\mathbf{a}}$ nazýváme uspořádanou množinu $n \in \mathbf{N}$ reálných čísel $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Píšeme $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Poznámka: Čísla $a_1, a_2, ..., a_n$ nazýváme souřadnice vektoru, číslo *n* dimenzí nebo rozměrem vektoru.

Všechny operace s vektory, které jste na střední škole prováděli s vektory dimenze 2 a 3, je možné rozšířit i na vektory dimenze *n*.

Operace s vektory

Definice 9.2.: Součtem vektorů $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, které mají stejnou dimenzi, je vektor $\vec{c}$ téže dimenze, definovaný vztahem

$$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n).$$

Součinem vektoru $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ a čísla $k \in \mathbf{R}$ je vektor

$$k.\vec{\mathbf{a}} = (k.a_1, k.a_2, ..., k.a_n).$$

Opačným vektorem k vektoru $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ nazýváme vektor

$$-\vec{\mathbf{a}} = (-a_1, -a_2, ..., -a_n).$$

Rozdílem vektorů $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ je vektor

$$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{b}}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_n - b_n).$$

Nulovým vektorem nazýváme vektor $\vec{\mathbf{o}} = (0, 0, ..., 0)$.

Skalární součin vektorů $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\vec{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ je číslo

$$\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + ... + a_n.b_n.$$

Příklad 9.1.

Vypočítejte vektor $\vec{\mathbf{a}} = 3\vec{\mathbf{b}} - 2\vec{\mathbf{c}}$ a skalární součin $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}$, jsou-li zadané vektory $\vec{\mathbf{b}} = (2,-3,5)$, $\vec{\mathbf{c}} = (-1,2,3)$..

Řešení: $\vec{\mathbf{a}} = 3(2,-3,5) - 2(-1,2,3) = (6,-9,15) - (-2,4,6) = (8,-13,9)$,

$\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = (8,-13,9).(2,-3,5) = 8.2 + (-13).(-3) + 9.5 = 16 + 39 + 45 = 100$.

Lineární vektorový prostor

Definice 9.3.: Množina *n*-rozměrných vektorů, na níž je definováno sečítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem, se nazývá *n*-rozměrný lineární vektorový prostor $\mathbf{V}_n$, jestliže do ní společně s libovolnými vektory $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \mathbf{V}_n$ patří také vektory $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ a $k.\vec{\mathbf{a}}$ ($k \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta).

Lineární kombinace vektorů

Definice 9.4.: Uvažujme vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, ..., \vec{\mathbf{v}}_k \in \mathbf{V}_n$.
Každý vektor $\vec{\mathbf{v}} = c_1.\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2.\vec{\mathbf{v}}_2 + ... + c_k.\vec{\mathbf{v}}_k$, kde $c_i \in \mathbf{R}$ jsou konstanty, nazýváme lineární kombinací daných *k* vektorů.

Například vektor $\vec{\mathbf{v}} = (-8,12,2)$ je lineární kombinací vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1 = (2,3,1)$ a $\vec{\mathbf{v}}_2 = (4,-2,0)$.
Existují totiž konstanty $c_1 = 2$ a $c_2 = -3$ tak, že platí:

$$\vec{\mathbf{v}} = 2.\vec{\mathbf{v}}_1 - 3\vec{\mathbf{v}}_2 = 2(2,3,1) - 3(4,-2,0) = (4,6,2) - (12,-6,0) = (-8,12,2).$$

Návod, jak tyto konstanty najít, dává následující příklad.

Příklad 9.2.

Vyjádřete vektor $\vec{\mathbf{v}} = (3,1)$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1$ a $\vec{\mathbf{v}}_2$, kde $\vec{\mathbf{v}}_1 = (1,2)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (1,1)$.

Řešení: Podle definice 9.4. musíme najít (pokud existují) taková reálná čísla c_1, c_2, pro která platí $\vec{\mathbf{v}} = c_1.\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2.\vec{\mathbf{v}}_2$. Po dosazení souřadnic vektorů $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2$ do této rovnice dostaneme $(3,1) = c_1.(1,2) + c_2(1,1)$. Porovnáním příslušných souřadnic na obou stranách rovnice vznikne soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 3 \\ 2c_1 + c_2 &= 1 \end{aligned}$$

Jejím řešením jsou konstanty $c_1 = -2$, $c_2 = 5$.

Závislost a nezávislost vektorů

Definice 9.5.: Je-li možné aspoň jeden z vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, ..., \vec{\mathbf{v}}_k \in \mathbf{V}_n$ vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů, říkáme, že vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, ..., \vec{\mathbf{v}}_k$ jsou lineárně závislé.
Není-li možné žádný z vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, ..., \vec{\mathbf{v}}_k$ vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů, říkáme, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé.

Poznámka: Nenulové vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, ..., \vec{\mathbf{v}}_k \in \mathbf{V}_n$ jsou lineárně nezávislé, platí-li rovnost $c_1.\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2.\vec{\mathbf{v}}_2 + ... + c_k.\vec{\mathbf{v}}_k = \vec{\mathbf{o}}$ jen pro $c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$. Pokud uvedená rovnost platí, přičemž aspoň jedna konstanta c_i je různá od nuly, jsou vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, ..., \vec{\mathbf{v}}_k \in V_n$ lineárně závislé. Dva vektory $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2$ jsou zřejmě lineárně závislé, právě když platí $\vec{\mathbf{v}}_1 = k.\vec{\mathbf{v}}_2$.

Příklad 9.3.

Rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{\mathbf{v}}_1 = (-1,-2,0)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (3,0,1)$, $\vec{\mathbf{v}}_3 = (2,-1,1)$ lineárně závislé nebo lineárně nezávislé.

Řešení: Pokud najdeme konstanty c_1, c_2, c_3, z nichž alespoň jedna je různá od nuly, pro které platí rovnost $c_1.\vec{\mathbf{v}}_1 + c_2.\vec{\mathbf{v}}_2 + c_3.\vec{\mathbf{v}}_3 = \vec{\mathbf{o}}$, znamená to, že zadané vektory jsou lineárně závislé. Pokud tato rovnost bude platit jen pro $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, jsou vektory lineárně nezávislé.

Po dosazení souřadnic daných vektorů dostaneme rovnici

$$c_1.(-1,-2,0) + c_2.(3,0,1) + c_3.(2,-1,1) = (0,0,0).$$

Porovnáním souřadnic vektorů na obou stran rovnice vznikne soustava tří rovnic o tří neznámých

$$\begin{array}{rcrcrcl} -c_1 & + & 3c_2 & + & 2c_3 & = & 0 \\ -2c_1 & & & - & c_3 & = & 0. \\ & & c_2 & + & c_3 & = & 0 \end{array}$$

Soustavy má jediné řešení $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Dané vektory jsou proto lineárně nezávislé.

V prostoru $\mathbf{V}_n$ může být maximálně n lineárně nezávislých vektorů. Tedy každá soustava $n+1$ vektorů prostoru $\mathbf{V}_n$ bude lineárně závislá. Na základě této skutečnosti budeme definovat maximální skupinu lineárně nezávislých vektorů daného vektorového prostoru a nazveme ji bází.

!*!Báze vektorového prostoru

Definice 9.6.: Bází vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$ nazýváme každou skupinu n lineárně nezávislých vektorů $\vec{\mathbf{v}}_i \in \mathbf{V}_n$.

Každý vektor prostoru $\mathbf{V}_n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze.

Vektory $\vec{\mathbf{v}}_1 = (1,0,0)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (0,1,0)$, $\vec{\mathbf{v}}_3 = (0,0,1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbf{V}_3$, neboť daná trojice vektorů je zřejmě lineárně nezávislá. Každý další vektor z tohoto prostoru by se dal vytvořit jako lineární kombinace vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3$ (např. $\vec{\mathbf{u}} = (2,-3,1) = 2.\vec{\mathbf{v}}_1 - 3.\vec{\mathbf{v}}_2 + \vec{\mathbf{v}}_3$).

Úlohy 9.1.

1. Určete vektor $\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}} - 3\vec{\mathbf{b}} + 2\vec{\mathbf{c}}$, je-li dáno $\vec{\mathbf{a}} = (5, 6, 3, 1)$, $\vec{\mathbf{b}} = (3, 1, -2, 0)$, $\vec{\mathbf{c}} = (-1, 0, 2, 2)$.

2. Vypočítejte skalární součin $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}$, jsou-li dány vektory $\vec{\mathbf{a}} = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$,

$\vec{\mathbf{b}} = \left(-\frac{1}{10}, \frac{7}{3}, -\frac{4}{8}, -2, 0, 1\right)$.

3. Najděte souřadnici n vektorů $\vec{\mathbf{a}} = (1, n, 4, -3)$, $\vec{\mathbf{b}} = (n, 3, -1, n)$ tak, aby skalární součin $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = 11$.

4. Vyjádřete vektor $\vec{\mathbf{v}}$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2$, je-li dáno:

a) $\vec{\mathbf{v}} = (21, -1)$, $\vec{\mathbf{v}}_1 = (-3, 2)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (5, 1)$,

b) $\vec{\mathbf{v}} = (4, 3)$, $\vec{\mathbf{v}}_1 = (1, -1)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (-3, 3)$,

c) $\vec{\mathbf{v}} = (5, -4, 1), \vec{\mathbf{v}}_1 = (2, -1, 1), \vec{\mathbf{v}}_2 = (1, 1, 2)$,

d) $\vec{\mathbf{v}} = (2, 4, 1), \vec{\mathbf{v}}_1 = (3, 1, 2), \vec{\mathbf{v}}_2 = (-1, 2, 1)$.

5. Vyjádřete vektor $\vec{\mathbf{b}}$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2, \vec{\mathbf{a}}_3$, je-li dáno:

a) $\vec{\mathbf{b}} = (1, -2, 5), \vec{\mathbf{a}}_1 = (1, 1, 1), \vec{\mathbf{a}}_2 = (1, 2, 3), \vec{\mathbf{a}}_3 = (2, -1, 1)$,

b) $\vec{\mathbf{b}} = (4, 1, 4), \vec{\mathbf{a}}_1 = (3, 0, 3), \vec{\mathbf{a}}_2 = (2, 0, 2), \vec{\mathbf{a}}_3 = (1, 1, 1)$,

c) $\vec{\mathbf{b}} = (-4, -2, -3), \vec{\mathbf{a}}_1 = (1, -2, 1), \vec{\mathbf{a}}_2 = (8, 4, 6), \vec{\mathbf{a}}_3 = (2, -1, 0)$.

6. Dokažte, že vektory $\vec{\mathbf{v}}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{\mathbf{v}}_3 = (0, 0, 1)$ jsou lineárně nezávislé.

7. Rozhodněte, zda dané vektory jsou lineárně závislé či nezávislé:

a) $(3, 1), (0, 1)$, b) $(-2, 6), (1, -3)$, c) $(-1, -2, 0), (3, 0, 1), (2, -1, 1)$,

d) $(2, 1, 0), (0, 1, 2), (4, 1, -2), (1, 1, 1)$, e) $(1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, -1), (2, 3, 1, -3)$,

f) $(1, 3, 5, 7), (0, 2, 5, 1), (0, 0, 2, -1), (0, 0, 0, 5)$.

8. Pro které číslo $k \in \mathbf{R}$ platí, že vektory $(2, 3, -4), (1, k, 3), (3, k, -2)$ jsou lineárně nezávislé?

Výsledky úloh 9.1.

1. $\vec{\mathbf{d}} = (-6, 3, 13, 5)$, 2. $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = \frac{15}{4}$, 3. $n = 15$, 4. a) $\vec{\mathbf{v}} = -2\vec{\mathbf{v}}_1 + 3\vec{\mathbf{v}}_2$, b) vektor $\vec{\mathbf{v}}$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2$, c) $\vec{\mathbf{v}} = 3\vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2$, d) vektor $\vec{\mathbf{v}}$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2$.

5. a) $\vec{\mathbf{b}} = -6\vec{\mathbf{a}}_1 + 3\vec{\mathbf{a}}_2 + 2\vec{\mathbf{a}}_3$, b) existuje nekonečně mnoho takových lineárních kombinací, c) $\vec{\mathbf{b}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\vec{\mathbf{a}}_2$, 7. a) nezávislé, b) závislé, c) nezávislé, d) závislé, e) závislé, f) nezávislé.

8. $k = 16{,}5$.

9.2 Matice

Matice

Definice 9.7.: Maticí **A** typu *m/n*, kde $m, n \in \mathbf{N}$, nazýváme *m.n* reálných čísel a_{ij}, sestavených do *m* řádků a *n* sloupců ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

První index *i* značí řádek a druhý index *j* sloupec, ve kterém prvek a_{ij} leží. Prvky a_{ii}, které mají stejné indexy, tvoří hlavní diagonálu matice. Řádky a sloupce budeme společně nazývat řady. Matice značíme velkými písmeny **A**, **B**, **C**,… .

Druhy matic

- čtvercová matice řádu *n* je matice typu *n/n*,
- obdélníková matice typu *m/n* je matice, pro kterou platí $m \neq n$,

- transponovaná matice k matici **A** je matice, která vznikne z matice **A** záměnou řádků za sloupce při zachování jejich pořadí; značíme ji $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$,
- jednotková matice řádu *n* je čtvercová matice, která má na hlavní diagonále samé jedničky a všude jinde samé nuly; značíme ji $\mathbf{I}$, případně $\mathbf{I}_n$,
- stupňová matice je matice, jejíž každý následující řádek má na začátku alespoň o jednu nulu více než řádek předchozí.

Matice **A** je rovna matici **B,** jsou-li obě matice stejného typu *m*/*n* a pro jejich prvky platí $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i = 1,2,\dots,m,\ j = 1,2,\dots,n$. Píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Operace s maticemi

Součtem (rozdílem) matic **A** a **B**, které jsou stejného typu, je matice **C**, téhož typu, pro jejíž prvky platí $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$. Píšeme $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ($\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$).

Součinem čísla $k \in \mathbf{R}$ a matice **A** je matice **B** téhož typu, pro jejíž prvky platí $b_{ij} = k.a_{ij}$. Píšeme $\mathbf{B} = k.\mathbf{A}$.

Součinem matice **A** typu *m/n* a matice **B** typu *n/p* je matice **C** typu *m/p*, pro jejíž prvky platí $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} = \vec{\boldsymbol{a}}_i.\vec{\boldsymbol{b}}_j$ (jde o skalární součin řádku *i* matice **A** a sloupce *j* matice **B**). Píšeme $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

Součin matic není komutativní, tedy obecně $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Poznámka: Pokud je násobení definováno, platí pro libovolná $k, l \in \mathbf{R}$:

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$,

$(k + l) \cdot \mathbf{A} = k \cdot \mathbf{A} + l \cdot \mathbf{A}$, $\quad k \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k \cdot \mathbf{A} + k \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$,

$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}.$

Příklad 9.4.

Jsou dány matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Vypočítejte matice $\mathbf{C} = 3\mathbf{A}$, $\mathbf{D} = 2\mathbf{B} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + 4\mathbf{I}$, $\mathbf{E} = \mathbf{A}.\mathbf{B}$.

Řešení : $\mathbf{C} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -9 & 12 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{D} = 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 + 3.2 & 2.(-1) + 3.0 \\ -3.3 + 4.2 & -3.(-1) + 4.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Příklad 9.5.

Určete matici **X** tak, aby platilo $\mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{3} \cdot \mathbf{A}$, pokud $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Nejprve vyjádříme matici **X** ze zadané rovnice $\mathbf{X} = \mathbf{3} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Dále provádíme operace s maticemi:

$$3\cdot\mathbf{A}=3\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&1&-2\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&3\\-3&3&-6\\3&6&9\end{pmatrix},$$

Pro násobení matic je možné použít následující pomůcku: do tabulky, která má 4 pole, napíšeme vpravo nahoru druhého činitele (v našem příkladě matici **A**), vlevo dolů prvního činitele (v našem příkladě matici **B**). Vpravo dole pak bude výsledná matice $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, jejíž prvky získáme jako skalární součiny řádků a sloupců, na jejichž průsečících prvek výsledné matice leží.

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-3&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&1&-2\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{array}{ccc|ccc}&&&2&0&1\\&&&-1&1&-2\\&&&1&2&3\\\hline -1&-1&1&0&1&4\\-3&2&0&-8&2&-7\\1&1&1&2&3&2\end{array}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

Rovnici $\mathbf{X}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{3}\cdot\mathbf{A}$ vyhovuje matice:

$$\mathbf{X}=\mathbf{3}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6&0&3\\-3&3&-6\\3&6&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&4\\-8&2&-7\\2&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-1&-1\\5&1&1\\1&3&7\end{pmatrix}.$$

Řádky matice můžeme považovat za vektory, zapsané pod sebou. Charakteristikou matice, která bude hrát v dalších úvahách velmi důležitou úlohu, je číslo, které vyjadřuje počet takto chápaných vektorů, které jsou lineárně nezávislé.

Hodnost matice

Definice 9.8.: Hodnost matice **A** udává maximální počet lineárně nezávislých řádků této matice. Hodnost matice $\mathbf{A}$ značíme symbolem $h(\mathbf{A})$.

Dvě matice, které mají stejnou hodnost, se nazývají ekvivalentní a píšeme $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$.

Poznámka: Vzhledem k tomu, že platí $h(\mathbf{A})=h(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$, můžeme v definici nahradit pojem řádek pojmem sloupec.

Například hodnost $h(\mathbf{A})$ matice

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&-3\\-1&-2&-3&3\\2&4&6&-6\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

je zřejmě 2, protože 1. a 4. řádek jsou lineárně nezávislé, a 2. resp. 3. řádek dostaneme z 1. řádku vynásobením číslem -1, resp. 2.

Většinou však není možné hodnost matice určit přímo ze zadané matice.
K výpočtu hodnosti pak používáme následující větu.

Věta o hodnosti stupňové matice

> **Věta 9.9.:** Hodnost matice ve stupňovém tvaru je rovna počtu nenulových řádků této matice (= počtu řádků, které neobsahují samé nuly).

Při určování hodnosti musíme tedy matici nejprve upravit na stupňový tvar. K tomu používáme tzv. ekvivalentní úpravy. Jsou to následující úpravy, které nemění hodnost matice:

- transponování matice,
- výměna řádků,
- násobení řádku nenulovým reálným číslem *k*,
- přičtení *k*-násobku ($k \neq 0$) některého řádku k jinému řádku,
- vynechání řádku, který obsahuje samé nuly,
- vynechání řádku, který je lineární kombinací ostatních řádků.

Uvedené úpravy je možné bez změny hodnosti provádět i se sloupci.

Příklad 9.6.

Určete hodnost matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení: Abychom určili hodnost matice pomocí věty 9.9., převádíme ji výše uvedenými úpravami na ekvivalentní stupňovou matici. Postupujeme přitom nejčastěji tak, že v prvním kroku vynulujeme první sloupec pod hlavní diagonálou. Je výhodné zadanou matici upravit nejprve na tvar, kdy prvek na místě $a_{11} = \pm 1$. Toho dosáhneme výměnou řádků nebo přičtením násobku vhodného řádku k prvnímu řádku. Nulové prvky pak vytváříme přičítáním násobků prvního řádku k dalším řádkům.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} .(-1).(\text{-}2).(\text{-}5) \\ \hookleftarrow \\ \qquad \hookleftarrow \\ \qquad\qquad \hookleftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -18 & 5 & -7 \\ 0 & -9 & 5 & -3 \\ 0 & -27 & 10 & -10 \end{pmatrix} \updownarrow \sim$$

Postup dále opakujeme pro druhý sloupec s tím, že první řádek zůstává beze změny a klíčovým prvkem, pomocí něhož nulujeme ostatní, je prvek a_{22}.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 5 & -3 \\ 0 & -18 & 5 & -7 \\ 0 & -27 & 10 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ .(\text{-}2).(\text{-}3) \\ \hookleftarrow \\ \qquad \hookleftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ .(\text{-}1) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy hodnost matice $h(\mathbf{A}) = 3$.

Poznámka: Pomocí hodnosti matice je možné rozhodnout o lineární závislosti či nezávislosti vektorů. Zapíšeme-li *k* vektorů do řádků matice, pak tyto vektory jsou lineárně nezávislé, právě když hodnost této matice je *k*. Pokud hodnost matice je menší než *k*, jsou vektory lineárně závislé.

!*!Inverzní matice

> **Definice 9.10.:** Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu *n*. Matice $\mathbf{X}$, pro kterou platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}_n$, se nazývá inverzní matice k matici $\mathbf{A}$.

Poznámka: 1) Inverzní matici k matici $\mathbf{A}$ budeme značit $\mathbf{A}^{-1}$.

2) Jestliže platí $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}_n$, pak také $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{I}_n$. Z definice 9.10. je zřejmé, že matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{I}_n$ musí být stejného typu.

3) Čtvercovou matici **A** řádu *n* nazveme regulární, právě když $h(\mathbf{A})=n$.

Z následující věty vyplývá, že inverzní matice (pokud existuje) je určena jednoznačně.

Existence a jednoznačnost inverzní matice

Věta 9.11.: Ke čtvercové matici $\mathbf{A}$ existuje inverzní matice právě tehdy, když matice $\mathbf{A}$ je regulární. Matice $\mathbf{A}^{-1}$ je pak určena jednoznačně.

Inverzní matici se naučíme určovat dvěma způsoby.
První z nich je založen na ekvivalentních úpravách matic **A** a **I**.
Postupujeme tak, že napíšeme vedle sebe matici $\mathbf{A}$ a jednotkovou matici **I** stejného rozměru.
Tuto „dvojmatici“ $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$ upravujeme pomocí ekvivalentních úprav tak, aby na místě matice $\mathbf{A}$ vznikla jednotková matice. Napravo od ní pak automaticky vznikne matice $\mathbf{A}^{-1}$.
Metoda vychází z toho, že po vynásobení systému $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{I})$ maticí $\mathbf{A}^{-1}$ dostaneme vztah

$$(\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{I})=(\mathbf{I}\,|\,\mathbf{A}^{-1}).$$

Stručně lze tento postup zapsat takto: $(\mathbf{A}|\mathbf{I})\sim\ldots\sim(\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1})$.

Druhý způsob určování inverzních matic (pomocí determinantů a adjungované matice) bude popsán později.

Příklad 9.7.

Určete inverzní matici k matici $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&1&-2\\4&4&6\end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&1&0&0\\3&1&-2&0&1&0\\4&4&6&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}.(-3)\,/.(-2)\\.(2)\\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&1&0&0\\0&-1&-4&-3&2&0\\0&2&6&-2&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\.(1)\,/.(2)\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&-4&-2&2&0\\0&-1&-4&-3&2&0\\0&0&-2&-8&4&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\.(-2)\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&14&-6&-2\\0&-1&0&13&-6&-2\\0&0&-2&-8&4&1\end{array}\right)\begin{array}{l}:2\\:(-1)\\:(-2)\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7&-3&-1\\0&1&0&-13&6&2\\0&0&1&4&-2&-\frac{1}{2}\end{array}\right).\text{ Inverzní matice }\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}7&-3&-1\\-13&6&2\\4&-2&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Úlohy 9.2.

1. Jsou dány čtvercové matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&0&-1\\2&5&1\\7&-2&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-3&2&1\\6&5&4\\0&2&-4\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

Vypočtěte: a) $\mathbf{B}-\mathbf{A}$, b) $\mathbf{A}-3\mathbf{B}+2\mathbf{C}$, c) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})-(\mathbf{B}-\mathbf{A})-2\mathbf{A}$.

2. Vypočtěte součin matic $\mathbf{A.B}$, $\mathbf{B.A}$, jestliže

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & -7 & 10 & -8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Vypočtěte $\mathbf{X}=(\mathbf{A}+\mathbf{2I}).\mathbf{A}$, jestliže $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Vypočtěte $\mathbf{X}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2-\mathbf{3I}$, jestliže $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Vypočtěte $\mathbf{X}=(\mathbf{2A}-\mathbf{B})^{\mathbf{T}}.\mathbf{A}$, je-li $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & -6 \\ -2 & 7 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Určete matici $\mathbf{X}$, pro kterou platí $\mathbf{5X}+\mathbf{2A}=\mathbf{3X}-\mathbf{A}+\mathbf{3B}$, jestliže $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Určete hodnosti matic:

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 3 & 8 & 15 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 12 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{G}=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 14 & -4 & 14 \\ -3 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & 22 \\ -5 & -5 & 9 & -5 & -6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Rozhodněte, pro které číslo a má matice $\mathbf{A}$ hodnost $h(\mathbf{A})=3$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix}$.

9. Určete inverzní matice k daným maticím (pokud existují): $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&4\\0{,}5&1\end{pmatrix}$,

$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&0\\0&2&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{pmatrix}$, $\mathbf{E}=\begin{pmatrix}3&1&-5\\2&-1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{F}=\begin{pmatrix}3&3&0\\0&2&1\\1&3&1\end{pmatrix}$,

$\mathbf{G}=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-3&2&0&0\\31&-19&3&-4\\-23&14&-2&3\end{pmatrix}$.

Výsledky úloh 9.2.

1. a) $\begin{pmatrix}-6&2&2\\4&0&3\\-7&4&-4\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}14&-2&-2\\-12&-6&-9\\7&-10&12\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

2. a) $\mathbf{A}.\mathbf{B}=\begin{pmatrix}53&29\\-9&64\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}.\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&-5&7\\-17&51&-5\\1&38&63\end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}.\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&10\\-4&7\\0&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}.\mathbf{A}$ neexistuje .

3. $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0&-9&6\\5&-1&-1\\-2&-11&7\end{pmatrix}$, 4. $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}10&9&-9\\6&4&-6\\-3&-3&1\end{pmatrix}$, 5. $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}32&-16&12&-12\\1&5&3&16\\7&-7&15&1\\17&-7&18&9\end{pmatrix}$. 6.

$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}&-\frac{3}{2}\\-9&6\\3&3\end{pmatrix}$ 7. $h(\mathbf{A})=2$, $h(\mathbf{B})=4$, $h(\mathbf{C})=2$, $h(\mathbf{D})=4$, $h(\mathbf{E})=2$, $h(\mathbf{F})=5$, $h(\mathbf{G})=3$,

$h(\mathbf{H})=6$. 8. $a\neq\frac{9}{4}$.

9. $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}^{-1}$ neexistuje, $\mathbf{C}^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{8}\end{pmatrix}$, $\mathbf{D}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-38&41&-34\\27&-29&24\end{pmatrix}$,

$\mathbf{E}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1&9&-5\\-2&8&-10\\-3&7&-5\end{pmatrix}$, $\mathbf{F}^{-1}$ neexistuje, $\mathbf{G}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\3&2&0&0\\1&1&3&4\\2&-1&2&3\end{pmatrix}$.

9.3 Determinanty

Úvahy k zavedení pojmu determinantu

Nechť je dáno n přirozených čísel $1,2,...,n.$ Budeme-li měnit jejich pořadí, dostaneme tzv. permutaci původní sestavy. Celkový počet permutací dané n-prvkové množiny je $n!$

Pokud v libovolné permutaci větší prvek předchází menší, budeme mluvit o inverzi. Např. v permutaci $(4,1,3,2)$ jsou celkem 4 inverze : (4,1), (4,3), (4,2) a (3,2). Bude-li počet inverzí sudý (lichý) říkáme, že permutace je sudá (lichá).

Nechť je dána čtvercová matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ řádu n a libovolná permutace $(p_1,p_2,...,p_n)$ sloupcových indexů $1,2,...,n$. Utvořme dále součin $a_{1p_1}\cdot a_{2p_2}\cdot ... \cdot a_{np_n}$ a vynásobme ho číslem $(-1)^p$, kde p je počet inverzí v dané permutaci. Pro všechny možné permutace množiny $1,2,...,n$ je takových součinů $n!$

Determinant

Definice 9.12.: Determinantem n-tého řádu čtvercové matice $\mathbf{A}$ řádu n rozumíme číslo $\sum\limits_{(p_1,p_2,...,p_n)}(-1)^p\cdot a_{1p_1}\cdot a_{2p_2}\cdot ... \cdot a_{np_n}$, kde $(p_1,p_2,...,p_n)$ je libovolná permutace sloupcových indexů $1,2,...,n$ a p je počet inverzí v této permutaci. Součet se provádí přes všech $n!$ permutací množiny $1,2,...,n$.

Determinant matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ se značí $\det\mathbf{A}$ nebo $|\mathbf{A}|$.

Hodnota determinantu 2. řádu

Dvojici sloupcových indexů $(1,2)$ odpovídají dvě permutace: $(1,2)$, která je sudá (nemá žádnou inverzi) a $(2,1)$, která je lichá (má jednu inverzi).

Tedy $\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}.$

Hodnota determinantu 3.řádu

Trojici sloupcových indexů (1,2,3) odpovídá 6 permutací : (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), (1,3,2), (2,1,3), (3,2,1). První tři jsou sudé, druhé tři jsou liché.

Tedy $\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}.a_{33}+a_{12}.a_{23}.a_{31}+a_{13}.a_{21}.a_{32}-a_{11}.a_{23}.a_{32}-$

$-a_{12}.a_{21}.a_{33}-a_{13}.a_{22}.a_{31}.$

Poznámka: Uvedená pravidla pro výpočet hodnoty determinantů 2. a 3. řádu se nazývají Sarrusova pravidla.

Příklad 9.8.

Vypočítejte hodnotu determinantu: a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Řešení: a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 2.(-3) - 4.5 = -6 - 20 = -26$,

b) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.3.2 + 0.1.2 + 6.1.(-1) - 2.3.6 - 6.(-1).1 - 1.0.2 = 0$.

Pro výpočet hodnoty determinantu 3. řádu můžeme použít následující pomůcku: první dva sloupce determinantu napíšeme vpravo od determinantu. Pak jednotlivé činitele součinů tvoří prvky ležící na hlavní diagonále a rovnoběžně s ní (jsou označené plnými šipkami), od nich pak odečítáme součiny prvků, ležících na vedlejší diagonále a rovnoběžně s ní (jsou označené čárkovanými šipkami):

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 1 \\ 0 & 3 \\ 6 & 1 \end{matrix} = 6.3.2 + 1.(-1).6 + 2.0.1 - 2.3.6 - 6.(-1).1 - 1.0.2 = 0.$$

Výpočet hodnoty determinantu rozvojem

Věta 9.13. : Hodnota determinantu řádu n je reálné číslo

$$\det\mathbf{A} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \mathbf{A}_{11} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \mathbf{A}_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot \mathbf{A}_{1n},$$

kde $\mathbf{A}_{1j}$ je determinant řádu $(n-1)$, který vznikne z původního determinantu vynecháním 1. řádku a sloupce j.

Poznámka: 1) Uvedený způsob vyjádření hodnoty determinantu nazýváme rozvoj podle prvků prvního řádku. Rozvoj lze provést analogicky podle libovolného jiného řádku nebo sloupce. Je vhodné k rozvoji použít řadu, obsahující co nejvíce nulových prvků.
2) Determinant $\mathbf{A}_{ij}$ budeme nazývat minorem determinantu $\det\mathbf{A}$ příslušným k prvku a_{ij}.
Hodnotu $\mathbf{A}^*_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \mathbf{A}_{ij}$ nazveme algebraickým doplňkem prvku a_{ij} determinantu $\det\mathbf{A}$.

Příklad 9.9.

Vypočítejte hodnotu determinantu $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

Řešení: Budeme nejprve postupovat přesně podle věty 9.12., tedy provedeme rozvoj podle prvků prvního řádku :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 1\\ -1 & -2 & -2\end{vmatrix}+(-1)^{1+4}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0\\ 3 & 3 & 1\\ -1 & -2 & 0\end{vmatrix}=2\cdot(-6+4)+2\cdot(-12-3-12+$$

$$+6+4+18)+1\cdot(-3+4)=-4+2+1=-1$$

Vzhledem k tomu, že třetí sloupec determinantu obsahuje dva nulové prvky, je však výhodnější provádět rozvoj podle prvků třetího sloupce:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0 & 2\\ 3 & 3 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 0 & -2\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 1\\ -1 & -2 & -2\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 2\\ -1 & -2 & -2\end{vmatrix}=2\cdot(-12-3-$$

$$-12+6+4+18)+1\cdot(-12+4-3+8)=2-3=-1.$$

Vlastnosti determinantů

Při výpočtu hodnoty determinantů vyšších řádů je možné používat následující pravidla, která výpočet zjednodušují (např. vytvořením nulových prvků na zvolených místech).

- Hodnota determinantu se nezmění, překlopíme-li jej kolem hlavní diagonály.
- Vyměníme-li dva po sobě následující řádky determinantu, hodnota determinantu změní znaménko.
- Je-li některý řádek *k*-násobkem jiného řádku, je hodnota determinantu rovna nule.
- Hodnota determinantu se nezmění, přičteme-li k některému řádku *k*-násobek jiného řádku.
- Má-li determinant v některém řádku samé nuly, je jeho hodnota rovna nule.
- Násobit determinant číslem $k \neq 0$ znamená násobit tímto číslem všechny prvky jednoho (libovolného) řádku nebo sloupce.

Vzhledem k prvnímu pravidlu je zřejmé, že uvedené vlastnosti determinantů platí také pro sloupce.

Příklad 9.10.

Vypočítejte hodnotu determinantu $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2\\ 4 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 2 & -3\end{vmatrix}$.

Řešení: Pomocí výše uvedených vlastností upravíme determinant na tvar, kdy v prvním sloupci budou tři prvky nulové. Pak vypočítáme hodnotu determinantu rozvojem podle prvků prvního sloupce. Všimněte si úpravy, při které násobíme čtvrtý řádek dvojkou. V dalším kroku pak musíme před determinant psát $\frac{1}{2}$, aby se jeho hodnota rovnala hodnotě původního determinantu.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2\\ 4 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 2 & -3\end{vmatrix}\begin{array}{l} .(-2)\,/\,.(-3)\\ \quad\hookleftarrow\\ \\ .(2)\quad\hookleftarrow\end{array}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2\\ 0 & -3 & -6 & -3\\ 0 & 2 & -2 & 1\\ 0 & -1 & -5 & -12\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-1)^{2}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -6 & -3\\ 2 & -2 & 1\\ -1 & -5 & -12\end{vmatrix}=$$

$$= 1.(-3).\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & -12 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(24 - 2 - 10 - 2 + 48 + 5) = -3\cdot 63 = -189\,.$$

Určení inverzní matice pomocí determinantů

Druhý způsob určování inverzní matice popisuje věta 9.14.

Určení inverzní matice pomocí adjungované matice

Věta 9.14.: Nechť **A** je regulární matice řádu n a $\mathbf{A}^*$ matice vytvořená z algebraických doplňků $\mathbf{A}^*_{ij}$ prvků a_{ij} matice **A.** Pak inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ k matici **A** má tvar

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\cdot(\mathbf{A}^*)^{\mathbf{T}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{pmatrix} \mathbf{A}^*_{11} & \cdots & \mathbf{A}^*_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A}^*_{n1} & \cdots & \mathbf{A}^*_{nn} \end{pmatrix}^{\mathbf{T}}.$$

Matice $(\mathbf{A}^*)^{\mathbf{T}}$ se nazývá adjungovaná k matici **A** a značíme ji adj**A**.

Příklad 9.11.

Určete inverzní matici k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pomocí adjungované matice.

Řešení: Nejprve vypočítáme determinant matice **A** :

$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 - (2 - 4) = 2$. Matice **A** je tedy regulární (řádky nejsou lineárně závislé), proto inverzní matice existuje.

Dále určíme všechny algebraické doplňky $\mathbf{A}^*_{ij}$:

$$\mathbf{A}^*_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ \mathbf{A}^*_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ \mathbf{A}^*_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\mathbf{A}^*_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,\ \mathbf{A}^*_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ \mathbf{A}^*_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\mathbf{A}^*_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \mathbf{A}^*_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \mathbf{A}^*_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

Podle věty 9.14. má pak inverzní matice tvar :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\cdot(\mathbf{A}^*)^{\mathbf{T}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & 6 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

!*!Řešení maticových rovnic

Rovnice, ve kterých je neznámou matice, se nazývají maticové rovnice. Při vyjadřování hledané matice používáme úpravy rovnic, běžné při řešení rovnic o jedné neznámé, ale je potřeba mít na paměti, že násobení matic není komutativní operace, a že pro matice není definovaná operace dělení. Místo dělení upravujeme maticové rovnice pomocí inverzní matice na základě následujících vět.

Věta o řešení maticové rovnice

Věta 9.15.: a) Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu *n*, $\mathbf{B}$ libovolná matice typu *n*/*p*. Maticová rovnice $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$ má právě jedno řešení $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$.

b) Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu *n*, $\mathbf{B}$ libovolná matice typu *p*/*n*. Maticová rovnice $\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{B}$ má právě jedno řešení $\mathbf{X}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{-1}$.

Příklad 9.12.

Z daných maticových rovnic vyjádřete matici **X**: a) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}+2\mathbf{B}=\mathbf{I}$, b) $2\mathbf{X}-3\mathbf{B}=\mathbf{X}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}$.

Řešení : a) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}+2\mathbf{B}=\mathbf{I}$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{I}-2\mathbf{B}\qquad /\cdot\mathbf{A}^{-1}\quad\longrightarrow\ (=\text{násobení zleva})$$

$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot(\mathbf{I}-2\mathbf{B})$$

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot(\mathbf{I}-2\mathbf{B})$$

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot(\mathbf{I}-2\mathbf{B})$$

b)

$$2\mathbf{X}-3\mathbf{B}=\mathbf{X}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}$$

$$2\mathbf{X}-\mathbf{X}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=4\mathbf{B}$$

$$\mathbf{X}\cdot(2\mathbf{I}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}})=4\mathbf{B}\qquad /\cdot(2\mathbf{I}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\quad\longleftarrow\ (=\text{násobení zprava})$$

$$\mathbf{X}\cdot(2\mathbf{I}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}})\cdot(2\mathbf{I}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}=4\mathbf{B}\cdot(2\mathbf{I}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$$

$$\mathbf{X}=4\mathbf{B}\cdot(2\mathbf{I}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$$

Příklad 9.13.

Řešte maticovou rovnici $3\mathbf{X}+2\mathbf{I}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{AX}$, kde $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&3&1\\-1&3&0\end{pmatrix}$.

Řešení: Nejprve vyjádříme z maticové rovnice neznámou matici **X**.

$$3\mathbf{X}+2\mathbf{I}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{AX}$$

$$3\mathbf{X}-\mathbf{AX}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-2\mathbf{I}$$

$$(3\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-2\mathbf{I}\qquad /.(3\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\quad\longrightarrow$$

$$\mathbf{X}=(3\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\cdot(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-2\mathbf{I})$$

Provedeme operace s maticemi:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-2\mathbf{I}=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\2&3&3\\-1&1&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2&-1\\2&1&3\\-1&1&-2\end{pmatrix},$$

$$3\mathbf{I}-\mathbf{A}=3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&3&1\\-1&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&0&-1\\1&-3&3\end{pmatrix}.$$

Jedním z uvedených způsobů určíme inverzní matici k matici $(\mathbf{3I}-\mathbf{A})$.

Je to matice $(\mathbf{3I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -3 & -2\\ 7 & -8 & -5\\ 6 & -7 & -4\end{pmatrix}$.

Tedy $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}3 & -3 & -2\\ 7 & -8 & -5\\ 6 & -7 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & -11 & -8\\ -25 & -27 & -21\\ -22 & -23 & -19\end{pmatrix}$.

Úlohy 9.3.

1. Vypočítejte hodnotu determinantu pomocí Sarrusova pravidla:

a) $\begin{vmatrix}2 & 4\\ 6 & 7\end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & -6\end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ -\cos x & \sin x\end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix}2 & -3 & 4\\ -7 & 6 & 5\\ 8 & -9 & 10\end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 8\\ 3 & 4 & 0\\ 1 & -5 & 9\end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix}\frac{8}{5} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2}\\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & -2\\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}$.

2. Vypočítejte hodnotu determinantu rozvojem podle dané řady:

a) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & 4\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}$ rozvojem podle 2.řádku,

b) $\begin{vmatrix}3 & 2 & 0 & 5\\ 1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & -7 & 6 & 0\\ -8 & 0 & 8 & 9\end{vmatrix}$ rozvojem podle 3.řádku.

3. Přesvědčte se, že při rozvoji determinantu

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1 & 3\\ 4 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1 & -4\end{vmatrix}$$

podle 1. řádku a pak podle 1. sloupce dostaneme stejný výsledek.

4. Rozvojem podle řádku samých nul se přesvědčte, že hodnota determinantu, jehož některá řada obsahuje samé nuly, má nulovou hodnotu:

$$\begin{vmatrix}-1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}.$$

5. Vypočítejte hodnotu determinantu (je možné nejprve ho upravit tak, aby v některé řadě byl co největší počet nul) :

a) $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 3 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 1\\ -3 & 0 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix}1 & 7 & 5 & 4\\ -4 & 4 & 12 & 8\\ 2 & 6 & 9 & -2\\ 3 & 1 & 7 & 3\end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$.

6. Určete inverzní matici k matici:

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix}$, b) $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 7 & -5\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$, c) $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, d) $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & 1\end{pmatrix}$ pomocí adjungované matice.

7. Z daných maticových rovnic vyjádřete matici $\mathbf{X}$:

a) $\mathbf{3}\cdot(\mathbf{X}+\mathbf{2A})=\mathbf{4}\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{B})$, b) $\mathbf{2}\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{X})=\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{I}$,

c) $\mathbf{2A}+\mathbf{AX}-\mathbf{X}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{2X}$, d) $\mathbf{2XA}^{\mathrm{T}}-\mathbf{I}+\mathbf{2X}=\mathbf{XB}-\mathbf{AB}$.

8. Řešte maticovou rovnici:

a) $\mathbf{2A}-\mathbf{BX}+\mathbf{3X}=\mathbf{2X}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}+\mathbf{2I}$, když $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{AX}+\mathbf{2X}=\mathbf{X}+\mathbf{B}$, když $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -2\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ -5 & 1 & 1\\ -2 & -2 & 4\end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A}+\mathbf{BX}=\mathbf{CX}+3\mathbf{A}$, když $\mathbf{A}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & 3 & 3\\ -2 & -1 & -7\\ 6 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

Výsledky úloh 9.3.

1. a) -10, b) -38, c) 1, d) -60, e) -53, f) $\frac{21}{10}$.

2. a) 12, b) -553.

5. a) 54, b) 1, c) 2 880, d) 36.

6. a) $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}$, b) $\mathbf{B}^{-1}=\begin{pmatrix}6 & -4 & -17\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & -6\end{pmatrix}$, c) $\mathbf{C}^{-1}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-8 & 6 & 9\\ -3 & -1 & 5\\ 7 & -2 & -3\end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{D}^{-1}=\begin{pmatrix}-8 & 29 & -11\\ -5 & 18 & -7\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

7. a) $\mathbf{X}=\mathbf{6A}+\mathbf{4B}$, b) $\mathbf{X}=(\mathbf{2A}-\mathbf{I})\cdot(\mathbf{2I}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$, c) $\mathbf{X}=(\mathbf{A}-\mathbf{3I})^{-1}\cdot(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-\mathbf{2A})$,
d) $\mathbf{X}=(\mathbf{I}-\mathbf{AB})\cdot(\mathbf{2A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{2I}-\mathbf{B})^{-1}$.

8. a) $\mathbf{X}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 6 & 12\end{pmatrix}$, b) $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, c) $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

9.4 Řešení soustav lineárních rovnic

Soustava lineárních rovnic

Definice 9.16.: Soustavou *m* lineárních rovnic o *n* neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ rozumíme soustavu :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

Kde $a_{ij}, b_i \in \mathbf{R}$. Čísla a_{ij} nazýváme koeficienty soustavy, čísla b_i absolutní členy. Uvedenou soustavu budeme značit *S*(*m*,*n*).

Poznámka: Řešením soustavy *S*(*m*,*n*) rozumíme každý vektor ($x_1, x_2, \dots, x_n$), který vyhovuje všem rovnicím soustavy.

Matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ nazveme maticí soustavy, matici $\mathbf{A}_R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ nazveme rozšířenou maticí soustavy.

Řešitelnost soustavy lineárních rovnic

Věta o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic

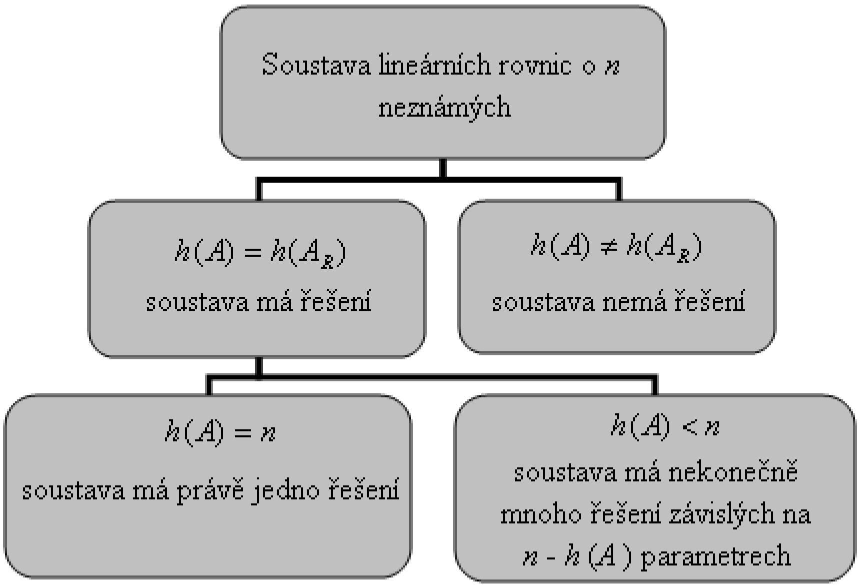
Věta 9.17. (Frobeniova) : Soustava lineárních rovnic *S*(*m*,*n*) má řešení právě tehdy, když matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnost.

Počet řešení soustavy lineárních rovnic

Věta 9.18.: Nechť soustava lineárních rovnic *S*(*m*,*n*) má řešení, *h* je hodnost matice soustavy a *n* počet neznámých. Pak
a) jestliže $h = n$, má soustava právě jedno řešení.
b) jestliže $h < n$, má soustava nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech.

Poznámka: 1) V případě, že soustava *S*(*m*,*n*) má nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h$ parametrech, můžeme za těchto $n - h$ neznámých volit libovolná reálná čísla. Hodnoty ostatních *h* neznámých (bázických) jsou pak určeny jednoznačně pomocí $n - h$ parametrů.
2) Vztah vyjadřující (pomocí parametrů) všechna řešení soustavy se nazývá **obecné řešení soustavy**. Dosadíme-li za parametry konkrétní reálná čísla, dostaneme jedno řešení, které nazýváme **partikulární řešení soustavy**.

Uvedené výsledky lze shrnout do následujícího schématu:



Metody řešení soustav lineárních rovnic

Dvě soustavy lineárních rovnic se stejným počtem neznámých, které mají množiny všech řešení sobě rovné, se nazývají ekvivalentní. Úpravy, jimiž se nemění množina řešení soustavy, nazýváme ekvivalentní úpravy soustavy lineárních rovnic. Nejdůležitější z nich jsou :

- výměna pořadí rovnic,
- násobení libovolné rovnice nenulovým reálným číslem *k*,
- přičtení *k*-násobku některé rovnice k jiné rovnici.

Dvě soustavy lineárních rovnic $S_1(m,n)$, $S_2(m,n)$, z nichž jedna vznikne z druhé použitím uvedených ekvivalentních úprav soustav, jsou ekvivalentní právě tehdy, když jejich odpovídající rozšířené matice jsou ekvivalentní.

Gaussova eliminační metoda

Ekvivalentním úpravám soustavy odpovídají příslušné úpravy její rozšířené matice. Soustavu proto můžeme řešit tak, že její rozšířenou matici převedeme na stupňový tvar. Této matici odpovídá soustava, ekvivalentní s danou soustavou, která má tvar, ze kterého zpětným dosazováním určíme řešení zadané soustavy. Uvedený postup se nazývá Gaussova eliminační metoda. Pomocí získané stupňové matice můžeme navíc rozhodnout o řešitelnosti soustavy na základě Frobeniovy věty.

Příklad 9.14.

Řešte soustavu lineárních rovnic: a)
$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & -\ x_2 & -2x_3 & -3x_4 & = & 8 \\ 3x_1 & +2x_2 & -\ x_3 & +2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +\ x_4 & = & -8 \end{array},$$

b)
$$\begin{array}{rrrrcr} -2x_1 & +\ x_2 & & +3x_4 & = & -3 \\ 3x_1 & -\ 2x_2 & -\ x_3 & -2x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & -\ 3x_2 & -5x_3 & -25x_4 & = & -9 \\ 4x_1 & +\ 3x_2 & -\ x_3 & +\ x_4 & = & 15 \end{array}.$$

Řešení: a) Z koeficientů soustavy vytvoříme rozšířenou matici soustavy a tu pak pomocí ekvivalentních úprav převedeme na stupňový tvar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right)\begin{array}{l} .(-2)/.(-3) \\ \hookleftarrow \\ \qquad\hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ .(-4)/.(-7) \\ .(5)\hookleftarrow \\ \qquad .(5)\hookleftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & 36 & 18 & -72 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ .(2) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & 90 & -180 \end{array}\right).$$

Vzhledem k tomu, že $h(\mathbf{A}) = 4 = h(\mathbf{A}_R)$, má podle Frobeniovy věty soustava řešení.

Navíc platí $h(\mathbf{A}) = 4 = n$, tedy soustava má právě jedno řešení. Získáme ho zpětným dosazováním ze soustavy, odpovídající stupňové matici:

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 6 \\ & -5x_2 & -8x_3 & +x_4 & = & -4 \\ & & -18x_3 & +36x_4 & = & -54 \\ & & & 90x_4 & = & -180 \end{array}$$

Postupujeme tak, že nejprve z poslední rovnice vyjádříme neznámou x_4, potom pomocí ní z předposlední rovnice vyjádříme neznámou x_3 atd.

Tedy $x_4 = \dfrac{-180}{90} = -2$, $\begin{array}{r} -18x_3 + 36.(-2) = -54 \\ x_3 = -1 \end{array}$,

$\begin{array}{r} -5x_2 - 8.(-1) - 2 = -4 \\ x_2 = 2 \end{array}$, $\begin{array}{r} x_1 + 2.(2) + 3.(-1) - 2.(-2) = 6 \\ x_1 = 1 \end{array}$

Řešení budeme zapisovat ve tvaru vektoru $(1, 2, -1, -2)$.

b) Přepíšeme soustavu do matice a přičtením druhého řádku k prvnímu získáme na klíčovém místě a_{11} jednotkový prvek:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -5 & -25 & -9 \\ 4 & 3 & -1 & 1 & 15 \end{array}\right)\begin{array}{l} \hookleftarrow \\ .(1) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -5 & -25 & -9 \\ 4 & 3 & -1 & 1 & 15 \end{array}\right)\begin{array}{l} .(-3)/.(-2)/.(-4) \\ \hookleftarrow \\ \qquad\hookleftarrow \\ \qquad\qquad\hookleftarrow \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & -27 & -13 \\ 0 & 7 & -5 & -3 & 7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ .(1)/.(-7) \\ \hookleftarrow \\ \qquad\hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & -32 & -14 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-9} & \cancel{-32} & \cancel{-14} \end{array}\right)$$

Protože $h(\mathbf{A}) = 3 = h(\mathbf{A}_R)$, má soustava podle Frobeniovy věty řešení.

Vzhledem k tomu, že $h(\mathbf{A}) = 3 \neq n = 4$, má soustava nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - h(\mathbf{A}) = 1$ parametru. Jednu neznámou volíme za parametr a ostatní neznámé vyjádříme pomocí tohoto parametru zpětným dosazováním ze soustavy, odpovídající stupňové matici.

Je to matice
$$\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & - & 5x_4 & = & -1 \\ & & & - & 9x_3 & - & 32x_4 & = & -14 \\ \hline \end{array} .$$

Zvolme za parametr t neznámou x_4. V naší úloze máme možnost zvolit za parametr i neznámou x_3, bývá ale zvykem (je-li to možné) volit za parametr neznámou s nejvyšším indexem.

Je tedy $x_4 = t,\ -9x_3 - 32t = -14$ $\qquad x_2 - 2\cdot\dfrac{14-32t}{9} - 5t = -1$

$$x_3 = \frac{14-32t}{9}, \qquad x_2 = \frac{19-19t}{9},$$

$$x_1 - \frac{19-19t}{9} + \frac{14-32t}{9} + t = 2$$

$$x_1 = \frac{23+4t}{9}.$$

Řešení zapíšeme ve tvaru $\left(\dfrac{23+4t}{9}, \dfrac{19-19t}{9}, \dfrac{14-32t}{9}, t\right)$, kde $t \in \mathbf{R}$.

Jde o tzv. obecné řešení soustavy. Zvolíme-li za parametr t určité reálné číslo, např. $t = 1$, dostaneme partikulární řešení $(3, 0, -2, 1)$.

!*!Jordanova metoda úplné eliminace

Tato metoda spočívá v úpravě rozšířené matice soustavy na jednotkovou matici. Ve sloupci na pravé straně pak dostáváme přímo hodnoty neznámých.

Příklad 9.15.

Jordanovou metodou úplné eliminace řešte soustavu lineárních rovnic: a)

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & & -2x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & +\ x_2 & +\ x_3 & = & 7 \\ -x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{array}, \quad \text{b)} \quad \begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & -\ 2x_2 & +\ 2x_3 & +\ x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -\ x_2 & +\ x_3 & +\ 3x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & -\ 3x_2 & & +\ 3x_4 & = & 1 \end{array}.$$

Řešení : Při úpravě rozšířené matice soustavy postupujeme tak, že nejprve za klíčový prvek volíme a_{11}, ve druhém kroku a_{22} a ve třetím a_{33}. Pomocí těchto čísel pak nulujeme ostatní prvky v příslušném sloupci.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 2 & 9 \end{array}\right).(-2)/.(1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 17 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right).(-2) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).(-5)/.(2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Podle Frobeniovy věty má soustava řešení, neboť $h(\mathbf{A}) = 3 = h(\mathbf{A}_R)$.

Navíc platí $h(\mathbf{A}) = 3 = n$, tedy soustava má právě jedno řešení. Získáme ho přímo z výsledné rozšířené matice soustavy: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Tedy obecné řešení dané soustavy má tvar $(1, 2, 3)$.

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} .(-2)/.(-1) \\ .(3) \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ .(1)/.(2) \\ \end{array} \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 15 & 18 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 10 \end{array}\right) .(-3) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 15 & 18 \\ 0 & -3 & 0 & -12 & -17 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} :(3) \\ :(-3) \\ :(-3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 17/3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -10/3 \end{array}\right).$

Podle Frobeniovy věty má soustava řešení, neboť $h(\mathbf{A}) = 3 = h(\mathbf{A}_R)$.
Platí $h(\mathbf{A}) = 3 \neq n = 4$, tedy soustava má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - h(\mathbf{A}) = 1$ parametru.
Zvolíme-li za parametr t neznámou x_4, dostaneme ostatní neznámé přímo ze stupňové matice: $x_1 = 6 - 5t, x_2 = \dfrac{17}{3} - 4t, x_3 = -\dfrac{10}{3} + 3t, x_4 = t.$

Tedy obecné řešení daná soustavy je $(6 - 5t, \dfrac{17}{3} - 4t, -\dfrac{10}{3} + 3t, t).$

!*!Cramerovy vzorce

Jde o metodu založenou na použití determinantů. Její význam spočívá v možnosti explicitně vyjádřit vzorcem řešení soustavy pomocí prvků rozšířené matice soustavy (bude využito např. u metody nejmenších čtverců nebo při řešení diferenciálních rovnic vyšších řádů). Omezením však je pracnost výpočtu determinantů vyšších řádů a také podmínka rovnosti počtu rovnic a počtu neznámých.

Věta o řešení soustavy pomocí Cramerových vzorců

Věta 9.19. : Mějme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých a označme $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ determinant matice této soustavy. Nechť $D \neq 0$. Pak soustava má právě jedno řešení, dané Cramerovými vzorci : $x_k = \dfrac{D_k}{D}$, kde D_k (pro $k = 1,2,\dots,n$) jsou determinanty řádu n, které dostaneme z determinantu D nahrazením jeho k-tého sloupce sloupcem absolutních členů $(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Příklad 9.16.

Pomocí Cramerových vzorců řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y + z &= 12 \end{aligned}.$$

Řešení: Determinant $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 1 - 4 + 3 + 2 = 12 \neq 0$, tedy soustava má právě jedno řešení.

Dále je $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 12 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 36$, $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 60$.

Jednotlivé neznáme určíme pomocí Cramerových vzorců

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{24}{12} = 2,\ y = \frac{D_2}{D} = \frac{36}{12} = 3,\ z = \frac{D_3}{D} = \frac{60}{12} = 5\,.$$

Tedy obecné řešení zadané soustavy má tvar $(2,3,5)$.

Poznámka: Cramerovými vzorci je možné řešit i soustavy $S(m,n)$, které mají nekonečně mnoho řešení, závislých na $n-h$ parametrech. Postupujeme tak, že z determinantu D vybereme nenulový determinant řádu h. Touto volbou determinantu soustavy současně volíme h bázických neznámých a $n-h$ parametrů.

Řešení soustav homogenních lineárních rovnic

Homogenní a nehomogenní soustava lineárních rovnic

Definice 9.20.: Soustava lineárních rovnic $S(m,n)$ se nazývá homogenní, jestliže platí $b_1 = \dots = b_m = 0$.
Je-li pro alespoň jedno $i = 1,\dots,m,\ b_i \neq 0$, nazývá se soustava nehomogenní.

Počet řešení homogenní soustavy lineárních rovnic

Věta 9.21.: Homogenní soustava lineárních rovnic má vždy řešení.
Je-li h hodnost matice soustavy a n počet neznámých, pak :
a) jestliže $h = n$, má homogenní soustava jediné řešení $x = (0,\dots,0)$. Toto řešení nazýváme triviální řešení.
b) jestliže $h < n$, má soustava nekonečně mnoho řešení závislých na $n-h$ parametrech.

Příklad 9.17.

Řešte homogenní soustavu
$$\begin{array}{rrrrrcl}
2x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & -3x_5 & = & 0\\
x_1 & -2x_3 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 0\\
2x_1 & -5x_2 & +x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & 0\\
3x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & -2x_5 & = & 0
\end{array}.$$

Řešení : V rozšířené matici soustavy vyměníme první a druhý řádek.

$$\begin{pmatrix}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0\\
2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 0\\
2 & -5 & 1 & -2 & 2 & 0\\
3 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{l} .(-2)/.(-3)\\ \hookleftarrow\\ \hookleftarrow\\ \qquad\hookleftarrow \end{array}
\sim
\begin{pmatrix}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0\\
0 & 5 & -3 & 4 & -5 & 0\\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 4 & -4 & 4 & -5 & 0
\end{pmatrix}
\updownarrow\sim$$

$$\sim
\begin{pmatrix}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 5 & -3 & 4 & -5 & 0\\
0 & 4 & -4 & 4 & -5 & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ .(-5)/.(-4)\\ \hookleftarrow\\ \qquad\hookleftarrow \end{array}
\sim
\begin{pmatrix}
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -8 & 4 & -5 & 0\\
0 & 0 & -8 & 4 & -5 & 0
\end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že $h(\mathbf{A}) = 3 = h(\mathbf{A}_R)$, má podle Frobeniovy věty soustava řešení.
Protože $h(\mathbf{A}) = 3$ a $n = 5$, má soustava nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - h(\mathbf{A}) = 2$ parametrech.
Zvolíme-li například $x_4 = u, x_5 = v$, kde $u, v \in \mathbf{R}$, dostaneme z ekvivalentní soustavy:

$$\begin{array}{rrrrrcl}
x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 0\\
 & x_2 & +x_3 & & & = & 0\\
 & & -8x_3 & +4x_4 & -5x_5 & = & 0
\end{array}$$

$x_3 = \frac{4}{8}x_4 - \frac{5}{8}x_5 = \frac{1}{2}u - \frac{5}{8}v$, $x_2 = -x_3 = -\frac{1}{2}u + \frac{5}{8}v$, $x_1 = 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -\frac{1}{2}u + \frac{7}{8}v$.

Řešení má tvar $(-\frac{1}{2}u + \frac{7}{8}v, -\frac{1}{2}u + \frac{5}{8}v, \frac{1}{2}u - \frac{5}{8}v, u, v)$, kde $u, v \in \mathbf{R}$.

Úlohy 9.4. :

1. Řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Gaussovy eliminační metody:

a) $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_1 \quad + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -2 \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4u &= -2 \\ 2x + 3y + 4z + u &= 2 \\ 3x + 4y + z + 2u &= -2 \\ 4x + y + 2z + 3u &= 2 \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} x + 2y + z - u &= 1 \\ 2x + 3y - z + 2u &= 3 \\ 4x + 7y + z &= 5 \\ 5x + 7y - 4z + 7u &= 8 \end{aligned}$,

d) $\begin{aligned} x + 2y + 3z - u &= 0 \\ x + 5y + 5z - 4u &= -4 \\ x - y + z + 2u &= 4 \\ x + 8y + 7z - 7u &= 6 \end{aligned}$, e) $\begin{aligned} 3x - 5y + z &= 2 \\ 2x - 3z &= 1 \\ 7x + 2y - z &= 6 \end{aligned}$, f) $\begin{aligned} 2x - 3y + 4z - w &= 1 \\ 2x - 3y + 2z + 3w &= 2 \\ 2x - 3y + 2z - 11w &= -4 \end{aligned}$,

g) $\begin{aligned} 7x - 9y + 2z + 4w &= 5 \\ 3x - 6y + z - 5w &= 2 \\ 8x - 11y - 2z + w &= 6 \\ 2x - 4y + 5z - 2w &= 9 \end{aligned}$, h) $\begin{aligned} x + y + 2z - u &= 6 \\ x + 2y - z + u &= -5 \\ 2x - y + z + u &= 3 \\ -x + y + z + 2u &= -4 \\ x \quad + 2z + 3u &= -1 \end{aligned}$.

2. Řešte soustavu lineárních rovnic Jordanovou metodou úplné eliminace:

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$,

c) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 - 2x_5 &= -42 \\ 3x_4 + 2x_5 &= 34 \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4_5 &= 100 \\ 2x_4 + x_5 &= 20 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 28 \end{aligned}$, d) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 4 \\ x_1 \quad - x_3 &= 2 \end{aligned}$,

e) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 &= 0 \end{aligned}$, f) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 \quad + 2x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$.

3. Pomocí Cramerových vzorců řešte soustavu lineárních rovnic:

a) $\begin{aligned} x + y + 3z &= 7 \\ x - 3y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$,

d) $\begin{aligned} x + 2y - z + u &= 9 \\ x - y + 2z - u &= 2 \\ -x + y + z - 2u &= -5 \\ 2x - y - z + u &= 2 \end{aligned}$.

4. Určete k tak, aby soustava rovnic $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= k \end{aligned}$ měla řešení.

Výsledky úloh 9.4.

1. a) $(0,8,2)$, b) $(1,-1,1,-1)$, c) $(3+5p-7q,\,-1-3p+4q,\,p,\,q)$, $p \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{R}$, d) soustava nemá řešení, e) $\left(\frac{11}{13}, \frac{2}{13}, \frac{3}{13}\right)$, f) $\left(p, \frac{2}{3}p, \frac{5}{14}, \frac{3}{7}\right)$, g) soustava nemá řešení, h) $(1,-1,2,-2)$.

2. $(1,2,-2,1)$, b) $(0,0,0,0)$, c) $(0,2,4,6,8)$, d) $(t+2,\,2t,\,t)$, e) $(7t-s,\,5t+s,\,s,\,2t,\,6t)$, f) $\left(\frac{5}{2}+t,\,1+6t,\,-\frac{1}{2}-7t,\,2t\right)$.

3. a) $(1,0,2)$, b) $(2,3,5)$, c) $(1,2,1,3)$, d) $(2,3,4,5)$. 4. $k = 5$.

Shrnutí kapitoly

Pojem vektoru a vektorového prostoru.

V lineární algebře definujeme vektor jako uspořádanou *n*-tici reálných čísel. Vektory jsou prvky vektorového prostoru. Vektorový prostor je množina vektorů, pro které jsou definovány operace sčítání a násobení číslem.

Lineární závislost a nezávislost vektorů.

Množina vektorů se nazývá lineárně nezávislá, jestliže žádný z nich není lineární kombinací ostatních vektorů.

Báze vektorového prostoru je množina vektorů z vektorového prostoru, které jsou lineárně nezávislé a každý další vektor z vektorového prostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů této množiny.

Matice a operace s maticemi.

Maticí typu *m*/*n* nazýváme *m.n* čísel, uspořádaných do *m* řádků a *n* sloupců. Významné jsou především matice čtvercové, jednotkové, stupňové a inverzní. Pro matice jsou definovány operace sčítání a odčítání, násobení matice číslem a násobení matic. Není však definovaná operace dělení matic.

Důležitou charakteristikou matice je její hodnost. Je definovaná jako maximální počet lineárně nezávislých řádků (nebo sloupců) matice.

Determinant a výpočet jeho hodnoty.

Každé čtvercové matici $\mathbf{A}$ můžeme přiřadit číslo, které nazýváme determinant. Značíme ho symbolem $\det \mathbf{A}$ nebo $|\mathbf{A}|$. Hodnotu determinantů 2. a 3. řádu počítáme Sarrusovým pravidlem, hodnotu determinantů vyšších řádů počítáme rozvojem. Při výpočtu determinantu je možné využívat vlastností determinantu.

Soustava lineárních rovnic a metody jejího řešení.

O řešitelnosti soustavy je možné rozhodnout pomocí Frobeniovy věty porovnáním hodnosti matice soustavy a rozšířené matice soustavy. Soustava lineárních rovnic může mít jedno, žádné nebo nekonečně mnoho řešení. V praxi soustavy nejčastěji řešíme Gaussovou eliminační metodou, při které rozšířenou matici soustavy převádíme pomocí ekvivalentních úprav na stupňový tvar. Kromě této metody je možné použít Jordanovu metodu úplné eliminace nebo Cramerovy vzorce.

Klíčové pojmy

- algebraický vektor,
- vektorový prostor,
- závislost a nezávislost vektorů,
- matice,
- hodnost matice,
- determinant,
- soustava lineárních rovnic.

Samostatný test

A. Teoretická část

1. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení :

a) Jestliže platí $\vec{\mathbf{b}} = -3\vec{\mathbf{a}}$, jsou vektory $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ lineárně závislé.

b) Vektor $\vec{\mathbf{e}} = (1,1,1,....,1)$ nazýváme nulovým vektorem.

c) Můžeme násobit jakékoli dvě matice obdélníkového typu $m/n, m \neq n$.

d) Hodnost matice je rovna nebo menší než je počet řádků matice.

e) Inverzní matice existuje ke každé čtvercové matici.

f) Je-li některý řádek k -násobkem jiného řádku, je hodnota determinantu rovna 0.

g) Homogenní soustava lineárních rovnic má vždy aspoň triviální řešení.

2. Souvisí pojem regulární matice **A** a hodnota det**A**? Pokud ano, jak?

3. Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ je: a) regulární, b) není regulární, c) čtvercová, d) jednotková,

e) inverzní k jednotkové matici.

4. Jsou dány determinanty: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ a $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. Určete, čím se liší jejich hodnota.

B. Praktická část

1. Jsou dány vektory: $\vec{\mathbf{a}} = (2, 2, -1)$ a $\vec{\mathbf{b}} = (-3, 0, 4)$. Vypočítejte: a) $3\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}}$, b) $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$.

2. Zjistěte, zda jsou vektory lineárně závislé nebo nezávislé:

a) $\vec{\mathbf{a}} = (3, 0, 1), \vec{\mathbf{b}} = (-1, 1, 0), \vec{\mathbf{c}} = (1, 1, 1)$,

b) $\vec{\mathbf{a}} = (0, 1, 1), \vec{\mathbf{b}} = (0, 2, 0), \vec{\mathbf{c}} = (0, 0, -1)$.

3. Jsou dány matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Určete matici $\mathbf{M} = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$.

4. Určete hodnost matice:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -8 & 0 \\ 3 & 7 & -2 & -1 & 5 \\ 10 & 22 & 8 & -18 & 10 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Určete inverzní matici k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (pokud existuje).

6. Určete hodnotu determinantu:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ -5 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

7. Řešte maticovou rovnici:

a) $\mathbf{AX} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{XA} + \mathbf{B} = \mathbf{2I}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Řešte soustavu lineárních rovnic:

a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2.x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -3 \\ x_1 - x_2 - x_4 &= -4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$.